

JEDNO PITANJE BEZ ODGOVORA U VEZI S KAZALJKAMA NA SATU

Sigurno se ponekom čitatelju i ponekoj čitateljici dogodilo sljedeće: u nekom trenutku – bez kakva posebnog razloga – „nesvjesno” pogleda na sat i ustanovi da su mu se kazaljke *upravo poklopile*, to jest da je jedna prekrila drugu.

Meni se i noću – kad ne bih mogao spavati ili kad bih se probudio – često znalo dogoditi da sam htio znati koliko je sati, pa sam na stolicu pokraj kreveta u mraku napipao džepnu svjetiljku na baterije i pogledao na sat: kad gle, kazaljke se *poklapaju*!

Neki kažu kako to poklapanje kazaljki, kad ga uočimo, znači da u tom času „netko misli na nas”. To je, dakako, praznovjerje, no poklapanje kazaljki na satu može nas potaknuti na malo računanja.

Kao prvo, koliko puta se za vrijeme 12 sati (dok mala kazaljka jednom obilazi brojčanik) dogodi poklapanje kazaljki? Velika se kazaljka zakreće kutnom brzinom koja je *dvanaest* puta veća od kutne brzine zakretanja male kazaljke, jer dok mala jednom obiđe čitav brojčanik sata, velika ga obiđe dvanaest puta. Kazaljke se zato poklope u 12 sati i nakon toga svakih $\frac{12}{11}$ sati. Kroz to će vrijeme, naime, mala kazaljka prijeći kut od $\frac{360^\circ}{12} \cdot \frac{12}{11} = \frac{360}{11}$ lučnih stupnjeva, dok će velika dotle prijeći kut od $12 \cdot \frac{360^\circ}{11} = 360^\circ + \frac{360}{11}$ lučnih stupnjeva i tako se, *ponovno*, poklopiti s malom. Odatle proizlazi da će se za vrijeme 12 sati velika i mala kazaljka poklopiti $360^\circ : \frac{360^\circ}{11} = 11$ puta.

Sada se postavlja ovo pitanje: *kolika je vjerojatnost* da će se kazaljke poklopiti ako *nasumce* pogledamo na sat?

Da bi to bilo matematički precizno pitanje, moramo se najprije dogovoriti o tome što će nam značiti da se „kazaljke poklapaju”.

Ako bismo pod time razumijevali kako to znači da se one poklapaju *savršeno*, to jest da međusobno zatvaraju kut od *točno* nula lučnih stupnjeva, nula lučnih

minuta i nula lučnih sekundi, onda bi vjerojatnost za takav događaj očito bila jednaka nuli – kao što je, recimo, vjerojatnost da nasumce odabrani realni broj bude cijeli (ili makar racionalan), također jednaka nuli. To, naravno, ne znači da bi takav događaj bio *nemoguć*, već jedino da je „krajnje nevjerojatan”.

No, našim očima ionako ne možemo konstatirati takvo „savršeno” poklapanje kazaljki sata. Čak ni čovjek izvrsnog vida ne bi to mogao konstatirati ako bi obje kazaljke zatvarale kut od, primjerice, jedne *lučne sekunde*. Taj bi kut, naime, velika kazaljka prešla za $1 : 21\,600$ vremenske minute, dakle za $\frac{1}{360}$ *vremenske sekunde* (jer se za vrijeme jedne vremenske minute velika kazaljka zakrene za $360^\circ : 60 = 6$ lučnih stupnjeva, što je jednako 360 lučnih minuta, odnosno $360 \cdot 60 = 21\,600$ lučnih sekundi). Mala bi pak kazaljka kut od jedne lučne sekunde prešla za vrijeme od $12 \cdot \frac{1}{360} = \frac{1}{30}$ vremenske sekunde. Sasvim sigurno takav sićušan kut među kazaljkama ni „oko sokolovo” ne bi moglo zamijetiti.

Budući da u ovom članci želim pokazati kako je vjerojatnost da se u nasumce odabrani trenutak kazaljke sata poklapaju bitno *manja* od onoga što o tome možemo statistički ustanoviti – a da mi se ne bi moglo prigovoriti kako „naštimaam” pretpostavke da bih dokazao svoju tezu – definirat ću da se kazaljke „*praktički* poklapaju” ako zatvaraju kut koji nije veći (dakle, koji je *manji ili jednak*) od, primjerice, 5 lučnih stupnjeva. To je kut što ga velika kazaljka prijeđe za $\frac{5}{6}$ vremenske minute, dakle za 50 vremenskih sekundi. To je kut koji se već vrlo izrazito može uočiti.

Izračunajmo sada koliko vremena prođe od trenutka kad *velika* kazaljka *zaostaje* za malom za 5 lučnih stupnjeva do trenutka kad velika kazaljka *prethodi* maloj za 5 lučnih stupnjeva.

Izračunat ćemo to na dva načina. Prvi je način u načelu isti kao kad izračunavamo koliko treba Ahileju da stigne kornjaču u glasovitom Zenonovu paradoksu.

Ako velika kazaljka zaostaje za malom za 5 lučnih stupnjeva, ona će taj put prijeći – kao što smo vidjeli – za vrijeme od $t_1 = 50$ vremenskih sekundi. Za to će vrijeme mala kazaljka odmaknuti za $\frac{5}{12}$ lučnih stupnjeva, a taj će daljnji dio puta velika kazaljka prijeći za vrijeme od $t_2 = \frac{50}{12}$ vremenskih sekundi.

Dotle je, dalje, mala kazaljka odmakla za $\frac{5}{12^2}$ lučnih stupnjeva, što će velika prijeći za daljnjih $\frac{50}{12^2} = t_3$ vremenskih sekundi.

I tako dalje ... velika će kazaljka, dakle, *sustići* malu i s njom se poklopiti nakon vremena od

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + \dots = 50 \cdot \left(1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{12^3} + \dots \right) =$$

$$= 50 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{12}} = 50 \cdot \frac{12}{11} = \frac{600}{11} = 54 \frac{6}{11} \text{ vremenskih sekundi.}$$

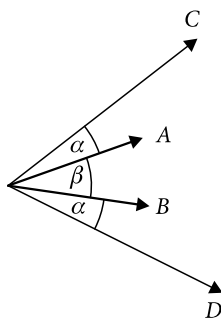
Isto toliko vremena, naravno, trebat će velikoj kazaljki za *prestizanje* male za 5 lučnih stupnjeva.

Znači da će čitavo vrijeme koje traje dok registriramo da se kazaljke praktički poklapaju potrajati $2 \cdot \frac{600}{11} = 109 \frac{1}{11}$ vremenskih sekundi = 1 vremenska minuta i $49 \frac{1}{11}$ vremenskih sekundi.

Izračunajmo taj isti rezultat *kraće*, bez beskonačnog geometrijskog reda!

Koliko vremena prođe od početne do konačne situacije dok uočavamo praktično poklapanje kazaljki? Prema slici zaključujemo: dok se mala kazaljka pomakla od položaja A do položaja B (zakrenuvši se za kut β), velika se kazaljka pomakla od položaja C do položaja D (zakrenuvši se za kut $2\alpha + \beta$). Kako se velika zakreće 12 puta brže od male, mora biti

$$2\alpha + \beta = 12\beta, \quad \text{dakle} \quad \beta = \frac{2\alpha}{11}.$$



Znači, ako je $\alpha = 5$ lučnih stupnjeva, bit će $2\alpha + \beta = 10 + \frac{10}{11} = \frac{120}{11}$ lučnih stupnjeva, što će velika kazaljka prijeći za $\frac{1200}{11}$ vremenskih sekundi.

Za vrijeme 12 sati, vidjeli smo, nastupit će 11 takvih „bliskih susreta” velike i male kazaljke. Odatle za vjerojatnost da u *nasumce* odabranom trenutku nastupi praktično poklapanje kazaljki proizlazi da je ona jednaka količniku

jedanaesterostrukog vremena jednog „bliskog susreta” (u vremenskim sekundama) i dvanaest sati (u vremenskim sekundama), dakle

$$v = \frac{11 \cdot \frac{1200}{11}}{12 \cdot 3600} = \frac{1}{36}.$$

Odatle bi proizlazilo sljedeće: ako se trenutci pogledavanja na sat odabiru *slučajno*, onda bi *jedan* od *trideset i šest* takvih pogleda rezultirao u konstataciji praktičkog poklapanja kazaljki.

Međutim, osobno sam to pratio tijekom više od deset godina, i više-manje uvijek je približno svaki *šesti* (a *ne* svaki trideset i šesti) pogled rezultirao u praktičnom poklapanju velike i male kazaljke! Odatle neizbježno proizlazi da pogledi nasumce na sat *nisu mogli biti* slučajni.

Pogledajmo kako bi se mijenjao izraz za vjerojatnost v , ako bismo pošli od definicije da se kazaljke praktički poklapaju ako zatvaraju kut ne veći (dakle manji ili jednak) s (a ne baš 5) lučnih stupnjeva.

Ponavljajući isti račun s tom razlikom da umjesto 5 lučnih stupnjeva polazimo od s lučnih stupnjeva, dobili bismo da je sada, općenitije:

$$v(s) = \frac{s}{5 \cdot 36} = \frac{s}{180}.$$

To pak znači: da bi se $v(s)$ poklopilo s mojim iskustvom registriranja poklapanja kazaljki, morao bi s biti takav da je $\frac{s}{180} = \frac{1}{6}$, dakle $s = 30$ lučnih stupnjeva. Naravno, *apsurdno* je misliti kako se kazaljke praktički poklapaju već i onda ako zatvaraju kut od 30 lučnih stupnjeva. Ostaje dakle da odabir nasumce trenutaka pogleda na sat *nije mogao biti slučajan*.

I tu se sad postavlja pitanje na koje ne znam odgovor: *ako* odabir pogleda na sat *nije* bio slučajan, o čemu je onda ovisio?

Svakako to pitanje ne spada u matematiku nego, možda, u fiziku ili u psihologiju ili, čak, u ekstrasenzornu percepciju. *Nije* baš vjerojatno da kazaljke, čak i ako su fluorescentne, pri preklapanju jače usmjeravaju svoje zračenje i time nas potiču da pogledamo na sat.

Zanimalo bi me je li koja čitateljica ili koji čitatelj imala/imao sličnih iskustava s uočavanjem poklapanja kazaljki na satu?

U svakom slučaju vjerujem da je ovaj kratki člančić koristan primjer kako nas neka jednostavna opservacija okolnosti u svakodnevnom, običnom životu može potaknuti da je pokušamo matematički obraditi i analizirati, makar se radi o tako jednostavnim i primitivnim računima kao što su ovi koje smo upravo proveli.

Kako smo te okolnosti nastojali iskoristiti u tekstu koji smo upravo pročitali?

1. Bila je to prigoda „raščistiti” odnos između *lučnih* i *vremenskih* minuta i sekundi.
2. Bila je to prigoda *jedan* račun (vrijeme trajanja praktičkog poklapanja kazaljki na satu) provesti na *dva* načina (pomoću beskonačnog geometrijskog reda i bez njega).
3. Bila je to prigoda za primjenu najjednostavnijih pojmova računa vjerojatnosti na svakodnevna zbivanja.
4. Bila je to prigoda traženja subjektivne *ocjene* (*preciziranja*) nekog *intuitivnog* pojma (poklapanja kazaljki na satu).
5. Bila je to prigoda situacije gdje uočavamo da je rezultat računa nešto što *nismo* očekivali, pa nas to potiče na razmišljanje *kako* je i *zašto* do toga došlo.
6. Bila je to prigoda da tekst završi nekim pitanjem na koje *nije* dan odgovor, pa nas to može potaknuti da o njemu i dalje razmišljamo i tražimo na nj odgovor, a ne da ga definitivno zaboravimo nakon što smo do kraja pročitali članak.